

Přehledový příspěvek

Vzájemné působení kmitající soustavy a zdroje energie

LADISLAV PŮST

Interaction of vibrating system and energy source

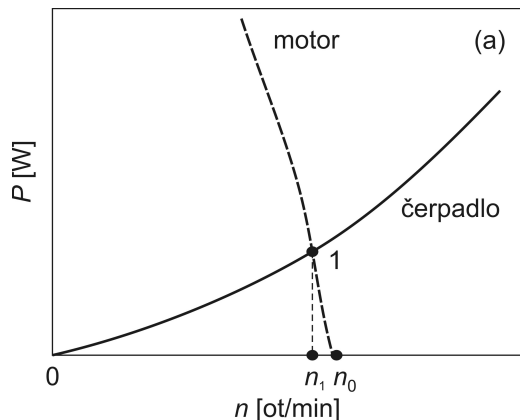
Majority of publications on mechanical vibrations are based on the assumption that the external excitation is produced by an ideal source of power with prescribed frequency. But in reality, the excitation sources are non-ideal with limited power, limited inertia and their frequency fluctuates according to the instantaneous state of oscillating system. The paper presents an overview of systems and results gained during the several dozens of years on this interaction problem. The most characteristic properties of systems excited by source of limited power and limited inertia are variation of revolution, distortion of harmonic motion, instability and non-uniform passage through resonance zone.

Key words: mechanical vibrations, limited source of energy, resonance passing, Sommerfeld's effect, nonlinearity

1. Úvod

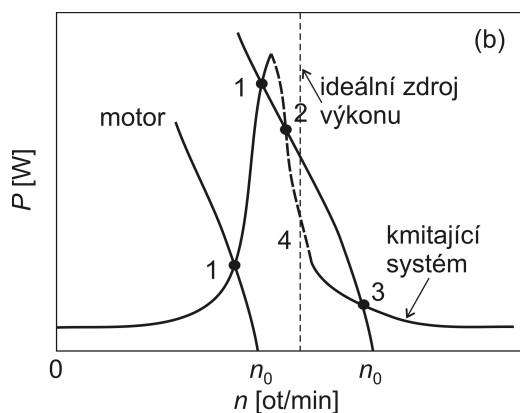
Teorie kmitání mechanických soustav se zakládá především na využití partikulárních řešení diferenciálních rovnic popisujících pohyb soustavy při vynuceném kmitání. Přitom se předpokládá, že buzení se děje s předepsanou, obvykle konstantní frekvencí a že tato frekvence nezávisí na velikosti amplitudy a fázevého posunutí rozkmitávané soustavy. Také stabilita periodických stavů, která je velmi důležitou veličinou při výzkumu a hodnocení složitých a nelineárních soustav, zkoumá se prakticky vždy při předepsané frekvenci buzení.

Takovéto zjednodušené schéma však neumožňuje vysvětlit řadu důležitých vlastností kmitajících soustav, které se objevují v rezonanční oblasti u skutečných strojů. Ve skutečnosti totiž mechanický systém je vždy rozkmitáván reálným zdrojem síly – např. motorem, který má konečný výkon a konečnou setrvačnost a vykazuje určitou závislost otáček na zatížení.



Obr. 1a. Monotónní výkonová charakteristika.

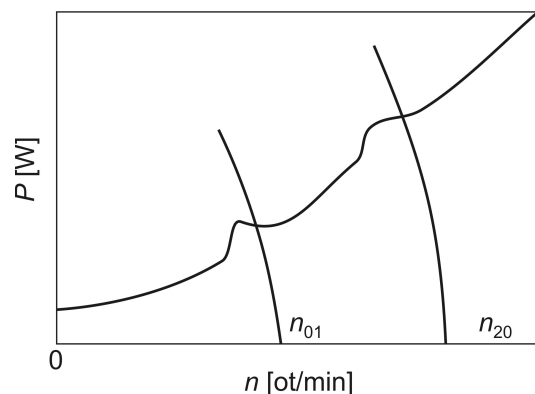
Fig. 1a. Monotonous power characteristics.



Obr. 1b. Nemonotónní charakteristika.

Fig. 1b. Non-monotonous characteristics.

Vzájemné ovlivňování reálného zdroje energie a poháněné mechanické soustavy (pracovního stroje) je dáno frekvenčními charakteristikami obou podsoustav. Jinak se tato interakce projeví u strojů, které mají s otáčkami monotónní stoupající charakteristiku odběru výkonu, jako jsou např. pumpy, čerpadla atd., kde potřebný výkon je zhruba úměrný čtverci otáček, a jinak u strojů pracujících na vibračním principu, kdy průběh výkonové otáčkové charakteristiky je nemonotónní a obsahuje kromě stoupající části i klesající část. Sem patří vibrační síta, vibrační transportéry, vibrační kladiva, ale také většina experimentálních zařízení pro výzkum dynamických vlastností strojů a stavebních konstrukcí. Schematicky jsou tyto dva případy



Obr. 2. Charakteristika stroje s převážně monotónně stoupajícím odběrem energie.
 Fig. 2. Machine characteristics with predominantly monotonously increasing energy consumption.

naznačeny na obr. 1a,b. V prvním případě se výkonové charakteristiky motoru a pracovního stroje protínají v jednom bodě 1 udávajícím ustálený stav při otáčkách n_1 . Bod n_0 udává otáčky motoru při běhu naprázdno.

U málo tlumených kmitajících lineárních systémů je výkonová charakteristika nemonotónní, obsahuje stoupající a klesající větve. Zmařený výkon v rezonanci bývá několikrát větší než mimo rezonanční oblast a za určitých podmínek je rovnovážný stav víceznačný, viz body 1, 2, 3. Tato víceznačnost je způsobena sklonem výkonové (momentové) charakteristiky zdroje – měkkého, neideálního, konečného zdroje energie.

Je-li systém rozkmitáván nekonečně silným (tvrdým, ideálním) zdrojem energie, pak kolísání zatěžovacího výkonu nemění otáčky. Jeho charakteristika je znázorněna na obr. 1b svislou čárkovanou přímkou. Rovnovážný stav lineárního kmitajícího systému je pak jednoznačný, daný bodem 4.

Chování strojních systémů v technické praxi (např. spalovacích motorů na pružně uloženém základu, rotorů velkých rotačních strojů atd.) je nejčastěji popsáno kombinací obou případů z obr. 1a,b, neboť v provozu představuje energie zmařená kmitáním systému v rezonanci pouze několik málo procent celkové energie, která se předává pracovnímu stroji nebo mediu. Energetické poměry v takovém případě jsou naznačeny na obr. 2. Vlivem převahy zatížení systému monotónně stoupajícího s otáčkami je vliv odběru energie kmitáním systému zanedbatelný a při matematickém modelování se většinou rezonanční charakter systému zanedbává [1–3] nebo se budící zdroj uvažuje jako tvrdý, nekonečného výkonu s předepsanou frekvencí.

Pro systémy, kde rezonanční charakter pracovního, resp. poháněného stroje je výrazný (vibrační síla, vibrační dopravníky, dynamické experimenty atd.), je třeba

použít složitější matematický model vystihující specifické vlastnosti rezonančních systémů.

2. Fyzikální podstata interakce kmitající soustavy a zdroje budící síly

Prvá podrobnější zmínka o chování málo tlumeného kmitajícího systému buzeného měkkým zdrojem energie je od Sommerfelda [4], podle kterého vznik hysterezní smyčky v odezvě takového systému a s tím související přeskoky z jedné části rezonanční křivky na druhou se nazývá „Sommerfeldův efekt“. Tento efekt byl experimentálně ověřen na kmitání nosníku rozkmitávaného na jeho konci nevyváženým motorem (obr. 3). Je to příklad málo tlumeného kmitajícího systému. V oblasti první rezonance lze použít model o 1 stupni volnosti.

Z pohybové rovnice

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \Delta me\omega^2 \cos \omega t \quad (1)$$

vyjde

$$x = a \cos(\omega t - \varphi) = \frac{\Delta me\omega^2 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}. \quad (1a)$$

Zmařená energie za 1 cyklus je

$$E = \int F_t dx = \int_0^{2\pi} b\dot{x}^2 dt = \pi ba^2\omega \quad (2)$$

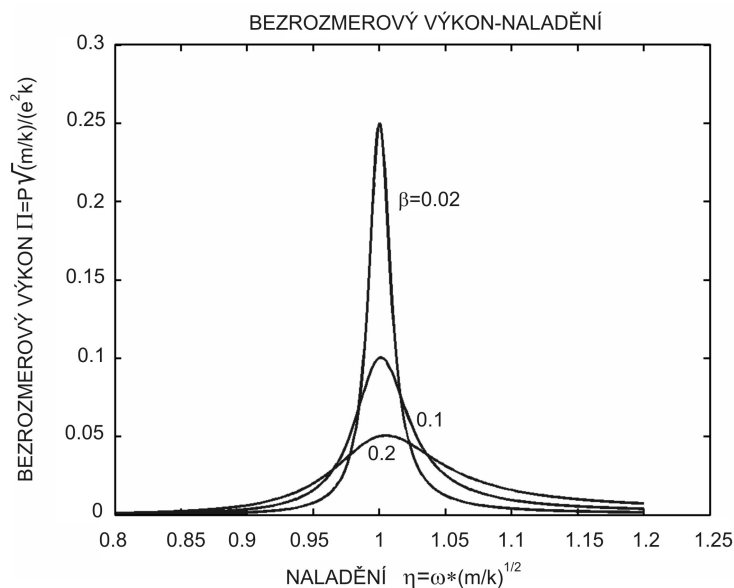
a za 1 s je zmařená energie neboli výkon

$$P = \frac{E\omega}{2\pi} = \frac{1}{2}ba^2\omega^2 = \frac{b}{2} \frac{(\Delta me)^2\omega^6}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}. \quad (3)$$



Obr. 3. Nosníkový systém.

Fig. 3. Beam system.

Obr. 4. Výkonová charakteristika $F_0 = \Delta m e \omega^2$.Fig. 4. Power characteristic $F_0 = \Delta m e \omega^2$.

Zavedením bezrozměrových veličin

$$\mu = \frac{\Delta m}{m}, \quad \eta = \omega \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{km}}, \quad \Pi = \frac{P}{e^2 k} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

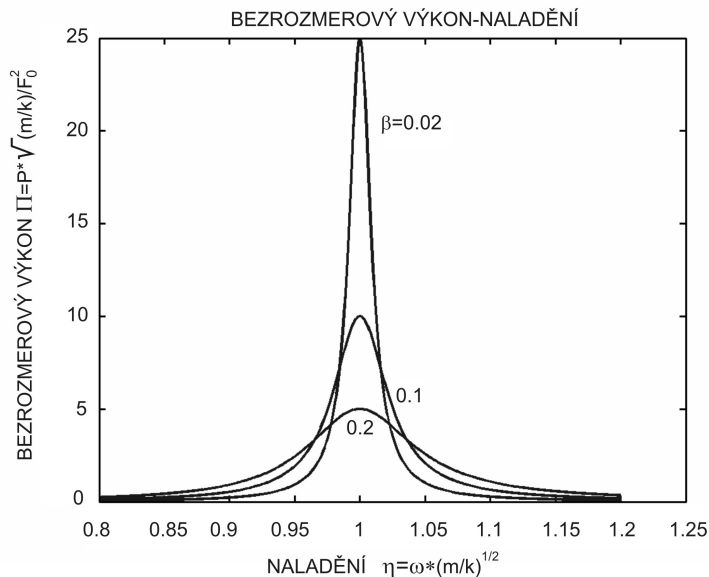
dostaneme

$$\Pi = \frac{\beta}{2} \frac{\mu^2 \eta^6}{(1 - \eta^2)^2 + \beta^2 \eta^2}. \quad (5)$$

Průběhy závislosti Π , η pro poměr hmot $\mu = 0,1$ a tři hodnoty poměrného tlumení $\beta = 0,02; 0,1; 0,2$ jsou v rozsahu $\eta = 0,8 - 1,25$ nakresleny na obr. 4. V mimořezonančních oblastech $\eta < 0,96$ a $\eta > 1,04$ stoupá zmařený výkon s rostoucím tlumením β , ale v rezonanci je tomu naopak, zmařený výkon roste s klesajícím tlumením β . V limitním případě pro $\beta \rightarrow 0$ je $\Pi \rightarrow \infty$ a diagram Π , η přejde na Diracovu funkci v bodě $\eta = 1$.

Podobné křivky dostaneme pro systém buzený kinematicky pomocí stlačované pružiny. Budící síla má konstantní amplitudu a pohybová rovnice je

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

Obr. 5. Výkonová charakteristika $F_0 = \text{konstanta}$.Fig. 5. Power characteristics $F_0 = \text{constant}$.

Zmařený výkon v bezrozměrovém tvaru je

$$\Pi = \frac{\beta}{2} \frac{\eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + \beta^2 \eta^2}, \quad (7)$$

kde nyní

$$\Pi = \frac{P\sqrt{km}}{F_0^2}. \quad (7a)$$

Diagram na obr. 5 je velmi podobný obr. 4 a kvalitativní rozdíly mezi vlastnostmi v rezonanční a nerezonanční oblasti platí i pro tento případ buzení.

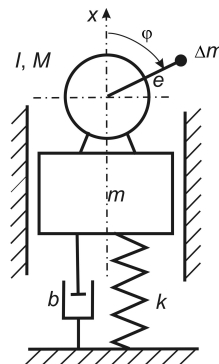
Z obou obrázků tedy plyne, že bez ohledu na typ buzení u menšího tlumení je vždy výraznější rezonanční vrchol, a proto účinky interakce mezi motorem a kmitající soustavou jsou výrazné především u málo tlumeného systému a dají se zanedbat u dostatečně tlumených soustav.

V prvním případě, zvláště když má budící zdroj malý výkon, musíme do matematického modelu soustavy zahrnout i rovnici popisující dynamické vlastnosti zdroje. V druhém, ideálním případě nekonečně silného zdroje energie stačí analyzovat pouze samotný kmitající systém a buzení vyjádřit jako zadanou předem definovanou funkci času.

3. Přehled úloh

S rostoucí rychloběžností, vylehčováním strojů a konstrukcí a se vzrůstajícím rozsahem experimentálního dynamického výzkumu se objevovala řada jevů, které se nemohly vysvětlit pomocí teorie kmitání vynuceného budící silou s předepsaným průběhem.

Rezonančními jevy ve strojích buzených neideálním, omezeným zdrojem energie se začali zabývat různí vědečtí pracovníci. V Rusku a Ukrajině to v poválečném období byla skupina prof. Kononěnka, která se zaměřila především na vliv vibrátoru s rotujícími nevyváženými hmotami [5–7]. Schéma základního studovaného systému je na obr. 6. Pohyb hmoty m ve vertikálním směru je popsán dvěma diferenciálními rovnicemi:



Obr. 6. Systém buzený nevyvážkem.

Fig. 6. System excited by unbalance.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= \Delta me(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi), \\ I\ddot{\varphi} &= L(\dot{\varphi}) - q(\dot{\varphi}) + \Delta me\ddot{x} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

kde $L(\dot{\varphi})$ je moment motoru, závisící od úhlové rychlosti, $q(\dot{\varphi})$ je moment třecích sil proti otáčivému pohybu.

Často se používá výsledný vnější moment

$$M(\dot{\varphi}) = L(\dot{\varphi}) - q(\dot{\varphi}). \quad (8a)$$

I když kmitající systém je lineární, vlivem vazby s odstředivým vibrátorem je soustava rovnic (8) silně nelineární.

O těchto jevech přednášel prof. Kononěnko na Konstruktérské konferenci v Liblicích u Mělníka v r. 1957 [6]. K řešení rovnic (8) použil přibližnou metodu středních hodnot, která je založena na předpokladu, že kmity se málo liší od harmonických a že změna úhlové rychlosti $\dot{\varphi}$ se děje pomalu, řádu malého parametru ε . V prvním přiblížení zanedbáváme vyšší harmonické složky. S použitím substituce

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\varphi + \xi), & \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, & \frac{d\Psi}{dt} &= \Omega, \\ \frac{dx}{dt} &= -a\Omega \sin \psi, & \psi &= \varphi + \xi, \end{aligned} \quad (9)$$

lze pak soustavu (8) transformovat na soustavu tří rovnic prvního řádu:

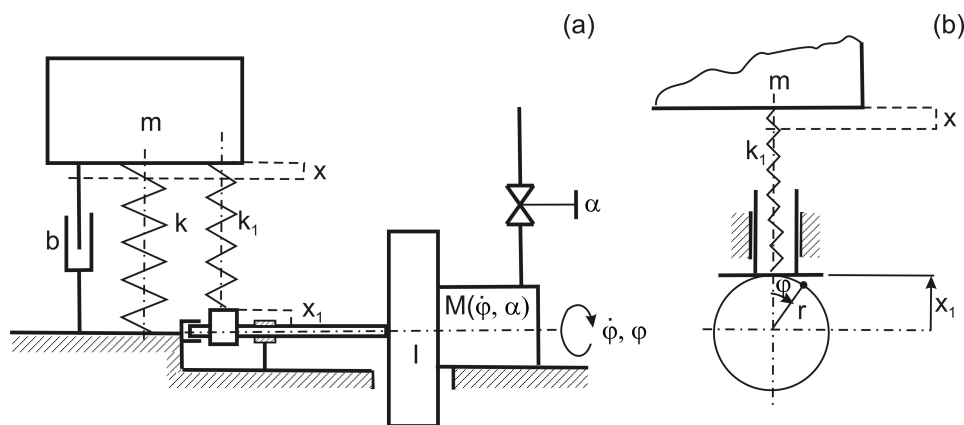
$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\varepsilon}{I} \left[M(\omega) + \frac{1}{2} me\Omega\omega a \sin \xi \right], \\ \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\Omega M} [me\omega^2 \sin \xi + b\Omega a], \\ \frac{d\xi}{dt} &= \Omega - \omega - \varepsilon \frac{me\omega^2}{2M\Omega a} \cos \xi.\end{aligned}\quad (10)$$

Ustálený stav dostaneme, položíme-li $\frac{d\omega}{dt} = 0$, $\frac{da}{dt} = 0$, $\frac{d\xi}{dt} = 0$.

Získané transcendentní rovnice dávají podle typu momentové charakteristiky motoru $M(u)$ jeden nebo tři (někdy i více) reálných kořenů $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$. Pro ně pak můžeme určit tři hodnoty amplitud $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$. Analýza stability ukazuje, že ne každý pár řešení $(\omega^{(i)}, a^{(i)})$ je stabilní a může být na reálné soustavě uskutečněn.

Bez návaznosti s pracemi Kononěnka v Moskvě byly také u nás ve stejnou dobu začaty práce na interakci zdroje energie s kmitajícím systémem [8, 9], které se však zaměřily na vyšetřování vlivu vibrátoru tvořeného motorem s vačkou a pružinou. Schéma zkoumaného systému je na obr. 7a,b.

Tento typ vibrátoru při rovnoměrném otáčení osy motoru dává buzení kmitajícího systému harmonickou silou o konstantní amplitudě F_0 . Pohybové rovnice jsou:



7a,b. Systém buzený kinematically vačkou a pružinou.

Fig. 7a,b. System kinematically excited by a cam and spring.

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} + b\dot{x} + (k + k_1)x &= k_1 r \cos \varphi, \\
I\ddot{\varphi} &= M(\dot{\varphi}, \alpha) + k_1 r(-x + x_{\text{st}} + r \cos \varphi) \sin \varphi,
\end{aligned} \tag{11}$$

kde k_1 je tuhost pružiny vibrátoru, r je excentricita vačky, $k_1 x_{\text{st}}$ je předpětí pružiny (v práci [8] $x_{\text{st}} = 0$).

Po zavedení bezrozměrových veličin a nové proměnné úhel φ místo času t – jsou pohybové rovnice ($\vartheta = d\varphi/d\tau$):

$$\begin{aligned}
\vartheta^2 y'' + \vartheta(\vartheta' + \varepsilon d)y' + y &= \varepsilon \chi \cos \varphi, \\
\vartheta \vartheta' &= \varepsilon \mu_0(\alpha) - \varepsilon \mu_1(\alpha) \vartheta + \varepsilon^2 \chi \rho \sin \varphi (\cos \varphi - y).
\end{aligned} \tag{12}$$

Tato soustava nelineárních rovnic byla řešena asymptotickou metodou ve tvaru

$$\begin{aligned}
y &= a \cos(\varphi - \psi) + \varepsilon u_1(a, \psi, w, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi, w, \varphi) + \dots, \\
\vartheta &= w + \varepsilon v_1(a, \psi, w, \varphi) + \varepsilon^2 v_2(a, \psi, w, \varphi) + \dots,
\end{aligned} \tag{13}$$

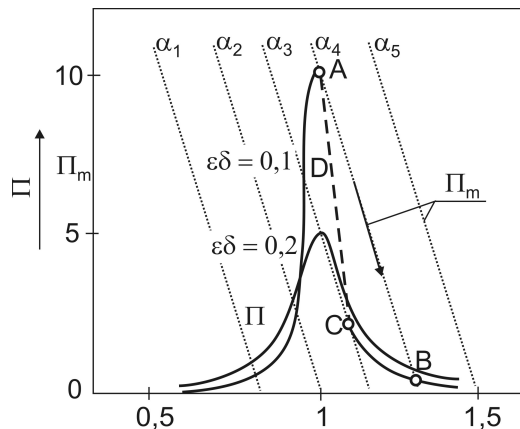
kde nové proměnné a , ψ , w jsou určeny vztahy

$$\begin{aligned}
\frac{da}{d\varphi} &= \varepsilon A_1(a, \psi, w) + \varepsilon^2 A_2(a, \psi, w) + \dots, \\
\frac{d\psi}{d\varphi} &= 1 - w + \varepsilon B_1(a, \psi, w) + \varepsilon^2 B_2(a, \psi, w) + \dots, \\
\frac{dw}{d\varphi} &= \varepsilon D_1(a, \psi, w) + \varepsilon^2 D_2(a, \psi, w) + \dots
\end{aligned} \tag{13a}$$

Pracným výpočtem byly získány analytické vztahy popisující kmitání systému:

$$\begin{aligned}
y &= a \left(1 + \varepsilon^2 \frac{\chi \rho}{16w^2} \right) \cos(w\Omega t - \psi) + \varepsilon^2 a \frac{\chi \varphi}{16w^2} \cos(3w\Omega t - \psi) t \dots, \\
\vartheta &= w - \varepsilon^2 \frac{\chi \rho}{4w} \cos 2w\Omega t + \dots
\end{aligned} \tag{14}$$

Malý výkon a malá setrvačnost zdroje budící síly má vliv na nerovnoměrnost otáčení ϑ , které obsahuje sudé (od předpětí i liché) harmonické složky. Ani průběh kmitů oscilačního systému není již čistě harmonický, nýbrž opět obsahuje vyšší harmonické složky, tentokrát však především lichého řádu. Zatímco malá setrvačnost ovlivňuje hlavně velikost vyšších harmonických složek, charakteristika motoru má naproti tomu značný vliv na stabilitu kmitů a na průběh rezonančních křivek.



Obr. 8. Interakce zdroje energie s tlumenou kmitající soustavou.

Fig. 8. Interaction of energy source with a damped oscillating system.

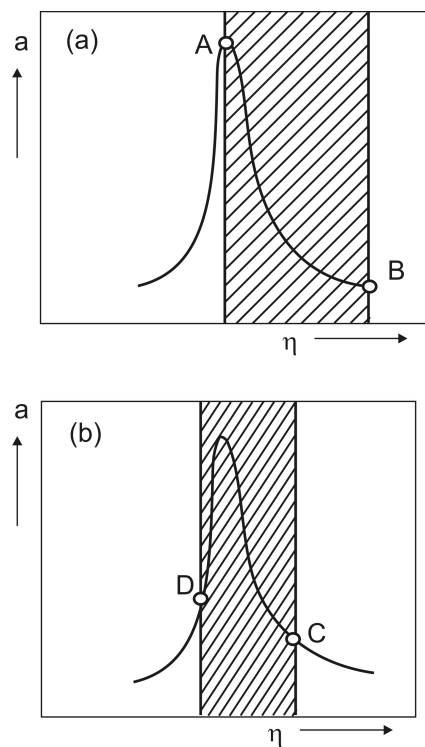
Tento vliv je vidět na obr. 8, kde jsou vykresleny 2 různě tlumené rezonanční výkonové křivky pro tlumení $\varepsilon\delta = 0,1$ a $0,2$ a několik linearizovaných charakteristik motoru vibrátoru s různě nastaveným přívodem energie α_i .

Je vidět, že při postupném přívodu energie se vzrůst otáček daný průsečíky motorových charakteristik α s křivkou odběru energie $\varepsilon\delta = 0,1$ před rezonancí silně zpomalí. Po přechodu vrcholu rezonance (bod A) nastane rychlý přeskok do bodu B. Při snižování přívodu energie nastane rychlý přechod z bodu C do D. Maximální amplitudy při přejezdu rezonance nahoru a dolů se tedy liší. Část rezonanční křivky AB je nestabilní a nelze ji experimentálně změřit.

Zvýšení tlumení na $\varepsilon\delta = 0,2$ odstraní všechny tyto jevy, všechny stacionární stavy jsou stabilní a pouze mírné zpomalení vzrůstu otáček před rezonancí a rychlejší vzrůst otáček za rezonancí zůstává.

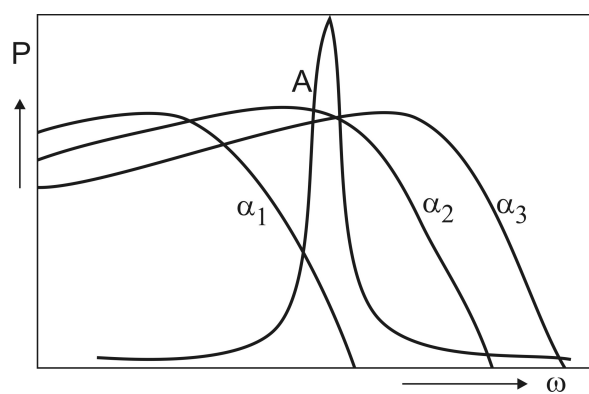
Oblasti nerealizovatelných stacionárních režimů při pomalém zvyšování (a) nebo snižování (b) přívodu energie do zdroje buzení jsou naznačeny vyšrafovanými plochami na obr. 9. Může však nastat případ, že zdroj energie je tak malý, že k přechodu rezonance vůbec nedojde. Toto je vidět na obr. 10, kde jsou vykresleny charakteristiky motoru s omezeným maximálním výkonem (např. asynchronní motor). Mluvíme o tzv. rezonanční bariéře.

Tyto jevy byly studovány též experimentálně na fyzikálních modelech. V práci [10] je popsán přechod rezonance ocelové desky buzené odstředivým vibrátorem. Schéma měřeného systému je na obr. 11, jeho fotografie na obr. 12a a pohled na rotační vibrátor poháněný elektromotorem je na obr. 12b. Na volném konci vibrátoru je vidět kotouč s výřezy pro optické měření fázového posunutí a okamžité úhlové rychlosti otáčení.



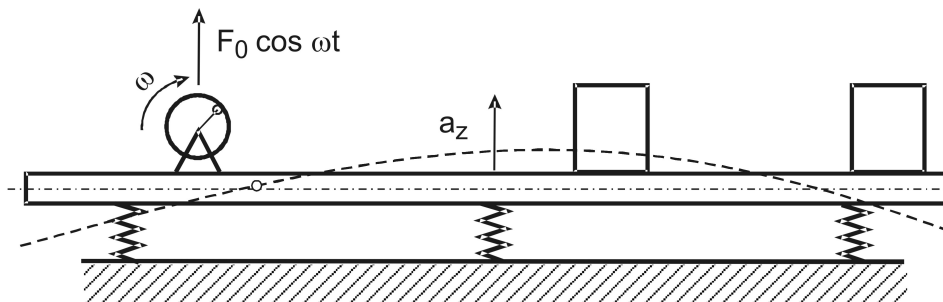
Obr. 9a,b. Oblasti nerealizovatelných stacionárních stavů.

Fig. 9a,b. Regions of unrealisable stationary states.



Obr. 10. Rezonanční bariéra při zvyšování přívodu energie.

Fig. 10. Resonance barrier at increase of energy input.



Obr. 11. Schéma experimentálního zařízení.

Fig. 11. Scheme of experimental set.

Rezonanční frekvence byla 162,5 Hz a amplituda budicí síly při těchto rezonančních otáčkách byla $F_0 = 830$ N.

Ukázka v ÚT ČSAV naměřeného kmitání při obousměrném přejíždění rezonance je na obr. 13. Byla zkoumána málo tlumená ($D = 0,015$) třetí dvouuzlová rezonance, jejíž tvar je na obr. 11 vyznačen čárkovaně. Body naměřené při pomalém snižování otáček jsou označeny kroužky, při zvyšování otáček křížky.

Řada měření ověřujících výsledky teorie je realizovaná nejen na fyzikálních modelech, ale také na analogových a digitálních počítačích [12, 14].

V další etapě výzkumu interakce omezeného zdroje energie a kmitající soustavy byla pozornost zaměřena na soustavy o 2 stupních volnosti. Byly to soustavy nosíkového typu s inerciální vazbou – obr. 14 [10], nebo dvouhmotové soustavy, modelující např. laděný tlumič – obr. 15 [1, 12]. Při řešení byly zkoumány stacionární i přechodové děje, jejich stabilita a chování v nestabilních oblastech, především v případech nelineárních pružin.

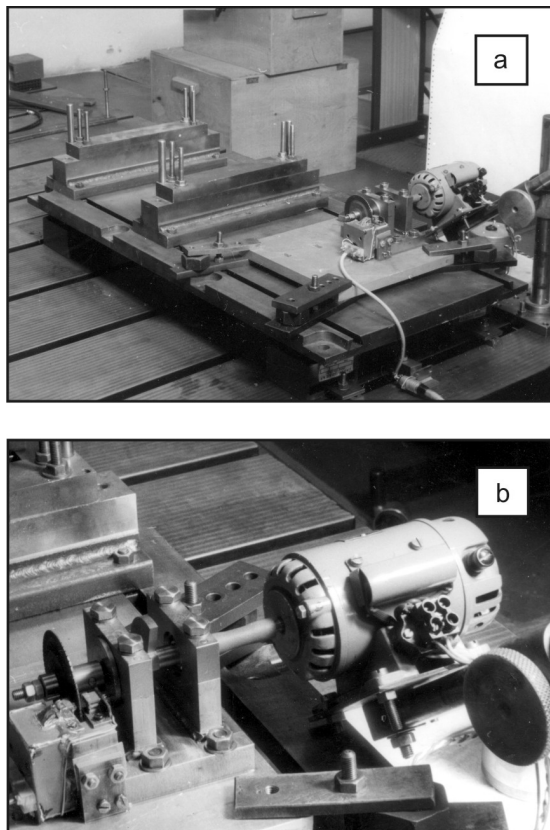
Vliv konečného výkonu vibrátoru se projevuje nejen u vynucených kmitů, ale také u ostatních typů buzení, např. parametrického nebo samobuzeného. V práci [13] je řešeno kmitání a stabilita systému s tyčí zatíženou statickou a periodickou silou na vzpěr. Schéma je naznačeno na obr. 16.

Pohybové rovnice vychýlení y tyče uprostřed a ve frekvenční oblasti její první rezonance jsou:

$$\ddot{y} + \frac{b\dot{y}}{m} + \left(\Omega^2 + \frac{k_2}{m} \sin \varphi \right) y + \gamma y^3 = 0, \quad (15)$$

$$I\ddot{\varphi} = M(\varphi, \alpha) + k_1 \left(x_0 + r \sin \varphi - \frac{\pi^2}{4l} y^2 \right) r \cos \varphi.$$

Při kmitání prutu se horní konec B pohybuje podle vztahu



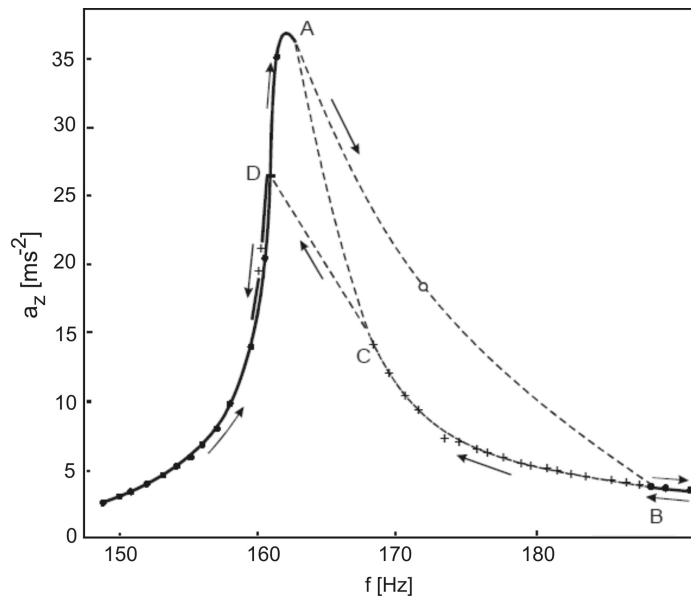
Obr. 12. Ocelová deska – kmitající systém (a), rotační vibrátor s elektromotorem (b).

Fig. 12. Steel plate – oscillating systém (a), centrifugal exciter with electric motor (b).

$$w = \frac{\pi^2 y^2}{4l} \quad (16)$$

a umožňuje přenos energie mezi prutem a vibrátorem.

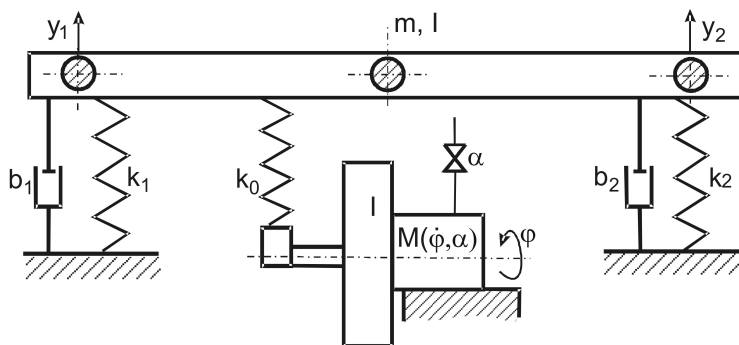
Děje při postupném zvyšování výkonu vibrátoru (α), který parametricky rozkmitává tlumený prut s nelineární kubickou charakteristikou, jsou schematicky znázorněny na obr. 17a. Kmitání se ustaví na režimech daných body na stoupající větvi parametrických kmitů. Po dosažení bodu *A* nastane rychlý přechod do bodu *B* a prut přestane kmitat. V klidu zůstává i při následujícím poklesu napětí α , a teprve v bodě *C* vzroste amplituda příčného kmitání do bodu *D*. Obrazec *ABCD A* udává dynamickou hysterezní smyčku parametrické tlumené soustavy s měkkým buzením.



Obr. 13. Záznam měření přechodu přes rezonanci.

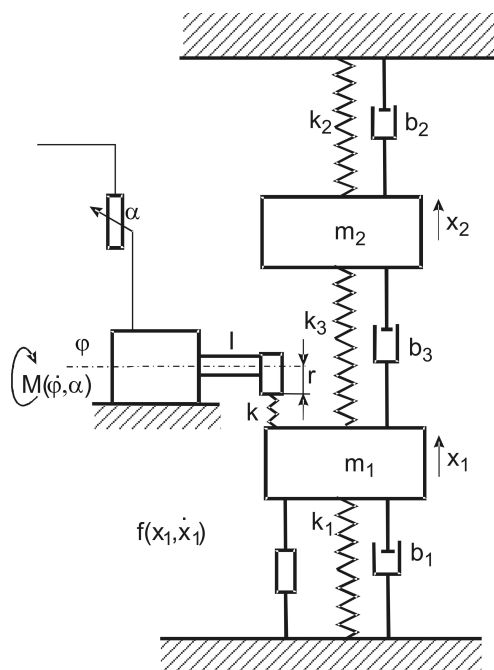
Fig. 13. Passage through resonance zone – record of measurement.

Pokud by parametricky rozkmitávaný systém byl lineární a zcela netlumený, pak nestabilní oblast je shora neomezená (obr. 17b) a tvoří bariéru znemožňující ji překročit při pomalé změně budící frekvence. Pokud ji rychlým přechodem nebo impulzem přeskočíme, klesne kmitání prutu na nulu a při návratu dojde k malému rozkmitání podél křivky CD .



Obr. 14. Systém s dvěma stupni volnosti.

Fig. 14. Two degrees of freedom system.



Obr. 15. Dvouhmotový systém.

Fig. 15. Two-mass system.

Další případ zpětného působení kmitající soustavy na zdroj energie je samobuzené kmitání různého typu. Na obr. 18a je schéma základního systému, v němž vznikají samobuzené kmity vlivem nelineární charakteristiky třecích sil (obr. 18b).

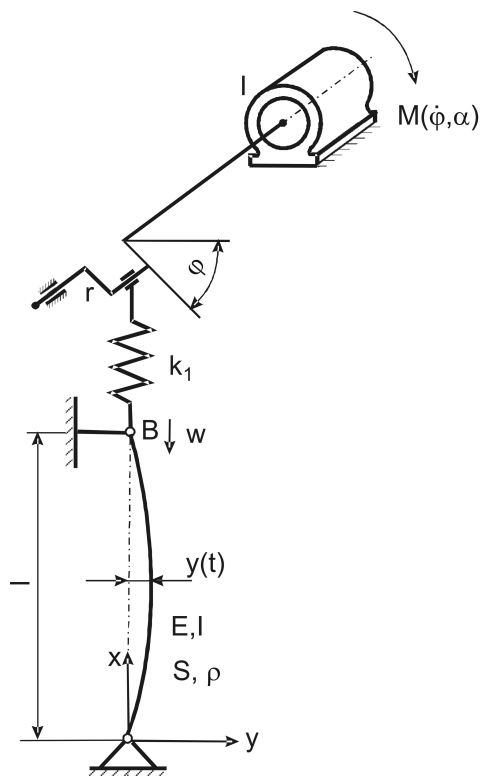
Pohybové rovnice jsou:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= F_t(\nu), \\ I\ddot{\varphi} &= M(\dot{\varphi}, \alpha) - rF_t(\nu), \end{aligned} \quad (17)$$

kde $\nu = r\dot{\varphi} - \dot{x}$.

Tento systém je podrobně analyticky i pomocí analogových počítačů řešen v pracích [13, 14], kde je ukázáno, že malá strmost momentové charakteristiky motoru silně ovlivňuje oblast a intenzitu samobuzených, resp. relaxačních kmitů a může dokonce zabránit jejich vzniku.

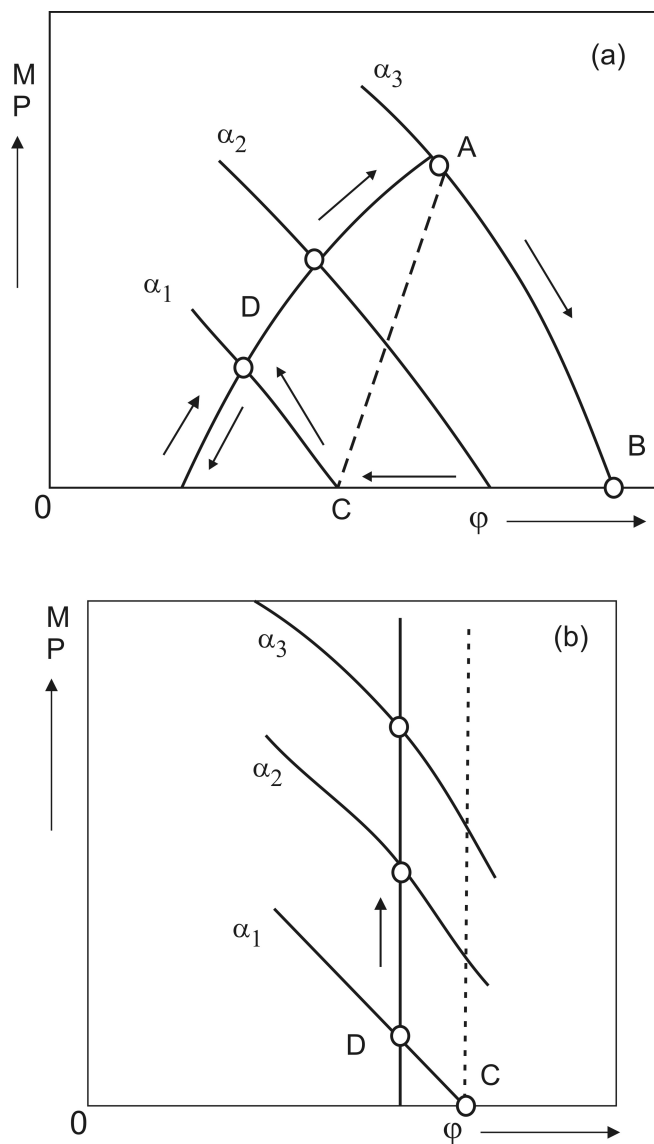
Vazba silně nelineární soustavy s motorem je tématem práce [15], kde je analyzováno chování kladivového drtiče kovového šrotu (obr. 19). Pohybové rovnice drtiče v časovém úseku, kdy kladivo se volně kýve, jsou:



Obr. 16. Parametricky buzená tyč na vzpěr.

Fig. 16. Parametric excitation of axially loaded bar.

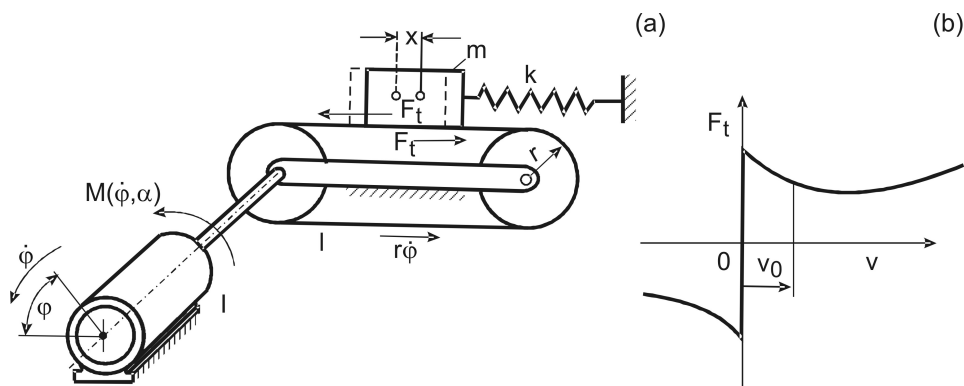
$$\begin{aligned}
 & mr(\rho \cos \psi + r)\ddot{\varphi} + mr^2\ddot{\psi} + mpr(\omega + \dot{\varphi})^2 \sin \psi \\
 & = -f\rho_c m \left(r(\omega + \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + \rho(\omega + \dot{\varphi})^2 \cos \psi - \zeta\ddot{\varphi} \sin \psi \right) \frac{\dot{\psi}}{|\dot{\psi}|}, \\
 & (I + (m_1 + m)\rho^2 + mr^2) \ddot{\varphi} + mpr \cos \psi (2\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) + mr^2\ddot{\psi} \\
 & \quad - mpr(2\omega + 2\dot{\varphi} + \dot{\psi})\dot{\psi} \sin \psi \\
 & = M_0(\omega_0 - \omega - \dot{\varphi}) + \left(\rho \sin \psi + f\rho_c \frac{\dot{\psi}}{|\dot{\psi}|} \right) \\
 & \quad m \left(r(\omega + \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + \rho(\omega + \dot{\varphi})^2 \cos \psi - \rho\ddot{\varphi} \sin \psi \right).
 \end{aligned} \tag{18}$$



Obr. 17a,b. Parametrický systém.

Fig. 17a,b. Parametric system.

Průběh rázu na drcený předmět MT je popsán jednoduchým vztahem s použitím koeficientu restituce R , který však nyní musí popisovat nejen odraz, ale i průchod materiálem, a proto může být i záporný:



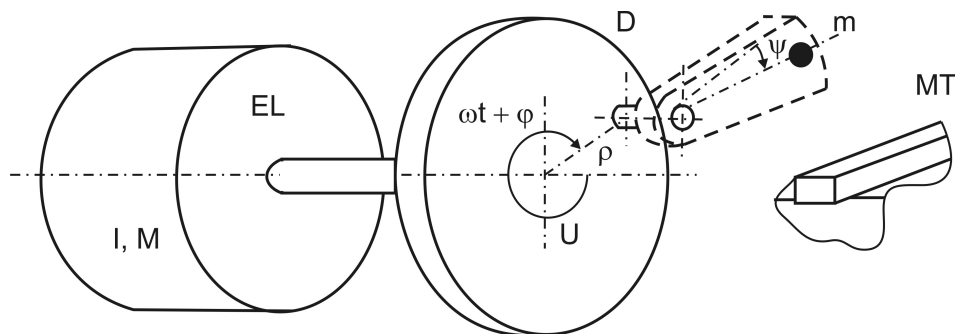
Obr. 18a,b. Samobuzený systém.

Fig. 18a,b. Self-excited system.

$$-1 < R < 1. \quad (19)$$

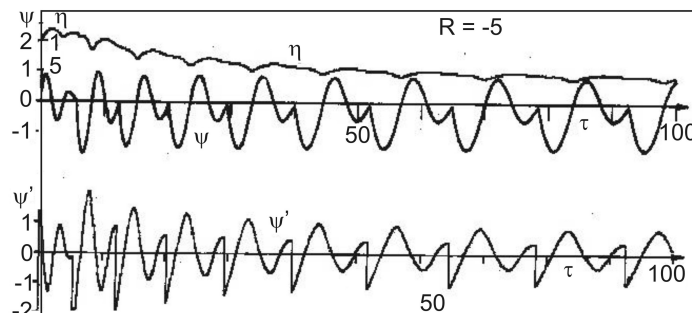
Ukázka začátku drcení po rozběhu motoru naprázdno je na obr. 20. Z poklesu otáček (křivka η), z kývání kladiva (ψ) a z průběhu jeho rychlosti (ψ') je dobře vidět vzájemná interakce motoru a mechanické soustavy.

Mimo Evropu se problémem omezeného zdroje buzení zabývá skupina většinou jihoamerických odborníků vedená prof. Balthazarem. Kromě přehledu dosavadních hlavně západních prací [16] se tato skupina zaměřila na teoretická a experimentální řešení nosníkových konstrukcí [17, 18]. Příklad jednoduché rámové konstrukce je na obr. 21. Numerické řešení pohybových rovnic této velmi málo tlumené soustavy umožnilo studovat jak Sommerfeldův efekt, tak rezonanční bariéru i různé typy



Obr. 19. Schéma kladivového drtiče.

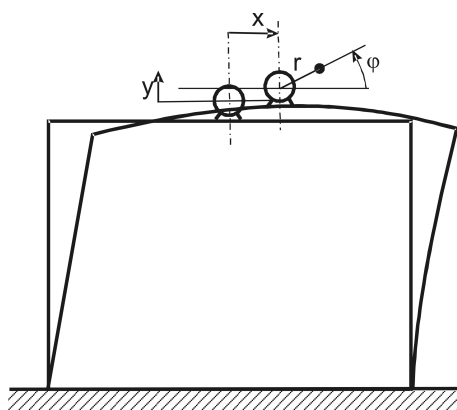
Fig. 19. Scheme of hammer crusher.

Obr. 20. Otáčky η a kývání ψ , ψ' kladiva drtiče.Fig. 20. Revolutions η and swinging ψ , ψ' of crusher hammer.

pohybu, včetně chaotických. Chaotické děje byly podrobněji studovány v pracích [19, 20] na systému kyvadla rozkmitávaného klikovým mechanismem.

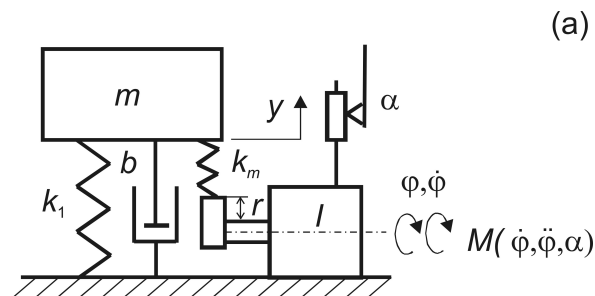
Interakci asynchronního motoru s klikovým mechanismem je věnována také práce [21], především z hlediska nerovnoměrnosti chodu.

Problematickou nestacionárních kmitů u soustav s omezeným zdrojem budičí síly jsme se v ÚT AV ČR zabývali poslední tři roky. V práci [22] je řešen případ přechodu přes rezonanční oblast jednoduchého lineárního systému buzeného vačkovým mechanismem ($F_0 \cong \text{konst.}$), nakresleného na obr. 22a. Motorová charakteristika byla zjednodušena na lineární závislost $M_0(\alpha - \vartheta)$, $\vartheta - \dot{\varphi}$.



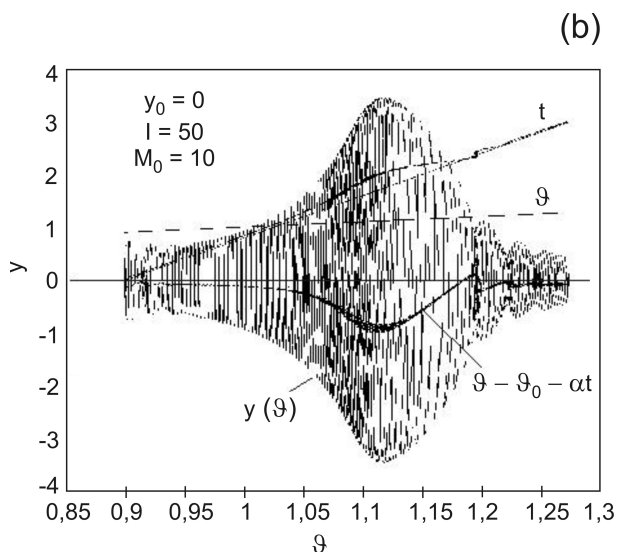
Obr. 21. Kmitání rámové konstrukce.

Fig. 21. Vibration of frame structure.



Obr. 22a. Systém pro studium přechodu přes rezonanci.

Fig. 22a. System for investigation of passing through resonance.

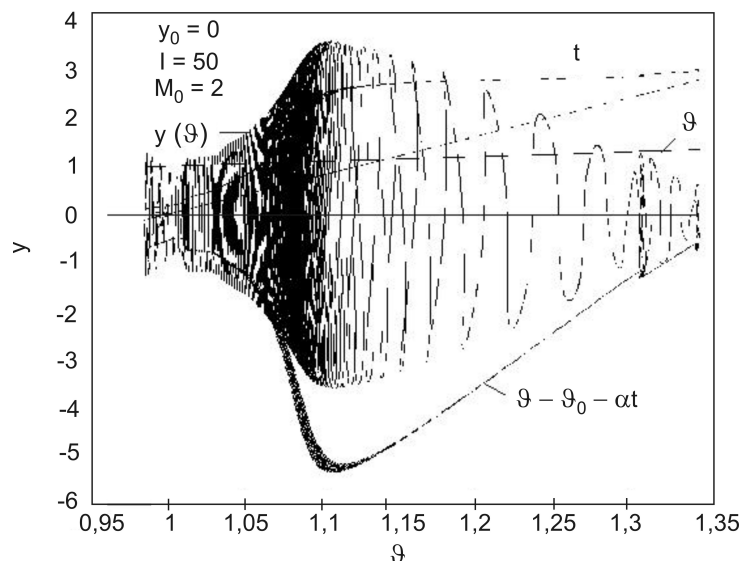


Obr. 22b. Záznam přechodu přes rezonanci.

Fig. 22b. Record of passage through resonance.

Průběh kmitů v závislosti na okamžité úhlové rychlosti ϑ je nakreslen na obr. 22b spolu s průběhem času t a s rozdílem okamžité rychlosti oproti jejímu rovnoměrnému zvyšování $\vartheta - \vartheta_0 - \alpha t$. Lineární závislost frekvence a času ($\vartheta = at$) platí pro tvrdý zdroj energie ($M_0 = \infty$). Pružina mezi vačkou a kmitajícím systémem byla bez předpětí ($y_0 = 0$), a proto kmitly obsahovaly druhou harmonickou složku.

Zatímco moment setrvačnosti I ovlivňuje především nerovnoměrnost chodu během jednotlivých kmitů, strmost M_0 momentové charakteristiky mění celkový průběh přejezdu přes rezonanci. Z obr. 23, kde byla strmost snížena z $M_0 = 20$ na $M_0 = 2$, je vidět výrazné zpomalení vzrůstu úhlové rychlosti ϑ v oblasti



Obr. 23. Přejíždění rezonance s měkkým zdrojem energie.

Fig. 23. Passage through resonance with a weak source of energy.

$\vartheta = 1,05 - 1,1$ (tmavé pole) následované rychlou změnou frekvence za rezonancí ($\vartheta = 1,1 - 1,3$). Průběhy t a $\vartheta - \vartheta_0 - \alpha t$ tyto změny kvantifikují.

Vliv předpětí na průběh kmitů je znázorněn na obr. 24a,b, kde je zaznamenáno najíždění do rezonance. Při nulovém předpětí kmitů i otáčky obsahují především druhou harmonickou složku, předpětí způsobuje vzrůst první harmonické složky.

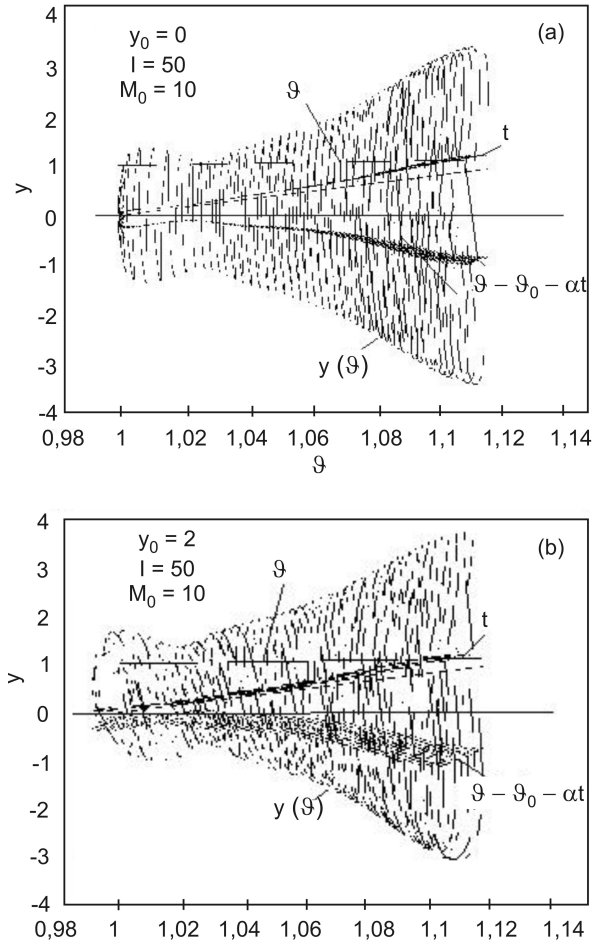
Vliv jednostranné nárazky na nestacionární kmitání byl studován v práci [23]. Pohyb systému s jednostrannou nárazkou je popsán rovnicemi

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + b\dot{y} + k_1y + H(y - y_r)k_r(y - y_r)(1 + b_r\dot{y}) &= k_m(r \cos \varphi - y + y_0), \\ I\ddot{\varphi} &= M(\dot{\varphi}, \alpha) + k_m r \sin \varphi (r \cos \varphi - y + y_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Záznam přejíždění rezonanční oblasti při vůli $y_r = 2$ a při nulovém tlumení v rázu $b_r = 0$ je na obr. 25. Tlumená nárazka omezila rozsah maximálních amplitud, obr. 26.

V předešlých výpočtech byla motorová charakteristika zjednodušena na lineární závislost $M_0(\omega - \alpha)$. Statické charakteristiky skutečných motorů však při větším zatížení jsou silně nelineární, jak je vidět z obr. 27.

Statické charakteristiky lze použít pro řešení stacionárních nebo slabě nestacionárních procesů, když moment budicího zdroje závisí pouze na otáčkách ω , nikoliv

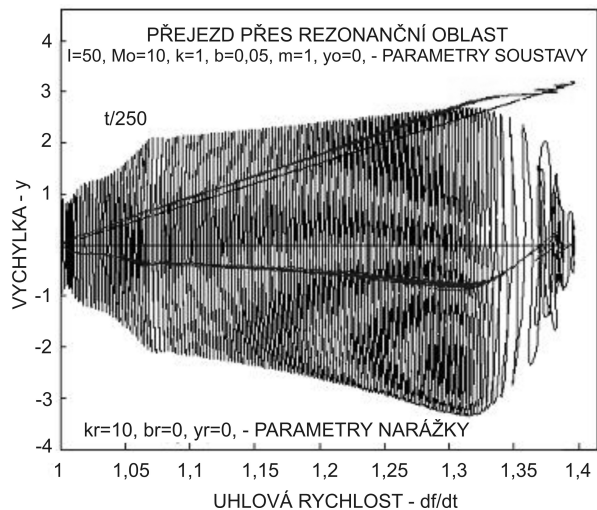


Obr. 24. Průběh kmitů bez předpětí pružiny vibrátoru (a), při předpětí pružiny vibrátoru (b).

Fig. 24. Oscillations without pre-stress of exciter spring (a), at pre-stress of exciter spring (b).

na jejich změně $d\omega/dt$. Je-li změna rychlosti $\dot{\varphi} = \omega$ výrazná, musíme použít složitější charakteristiku $M(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \alpha)$, např. s přidavným členem $M_1(\ddot{\varphi})$ k stacionární charakteristice [24]:

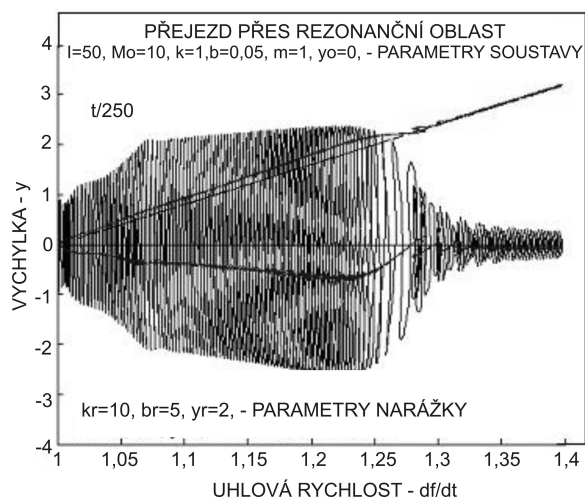
$$M(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \alpha) = M(\dot{\varphi}, \alpha) + M_1(\ddot{\varphi}). \quad (21)$$



Obr. 25. Vliv jednostranné elastické nárazky.

Fig. 25. Influence of one-side elastic stop.

Příklad tří charakteristik pro hodnoty napájecího parametru (běh naprázdno) $\alpha = 5, 7, 9$ a pro nelineární přídavný člen úměrný třetí mocnině zrychlení $M_1(\ddot{\varphi}) = M_z \ddot{\varphi}^3$ je na obr. 28.



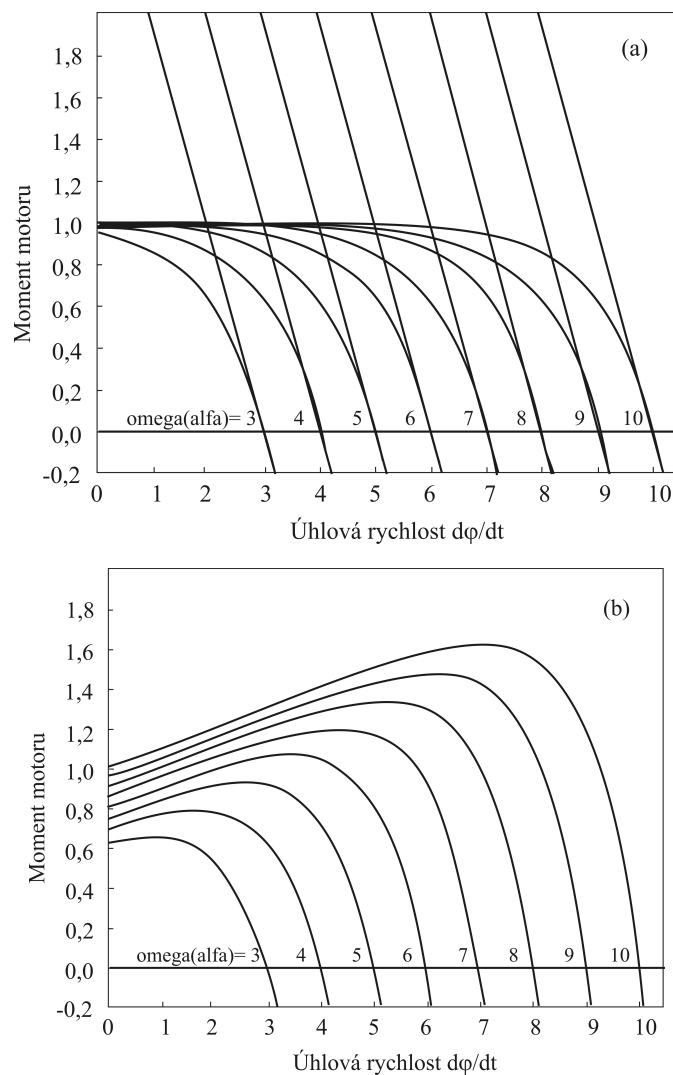
Obr. 26. Vliv tlumení v nárazce.

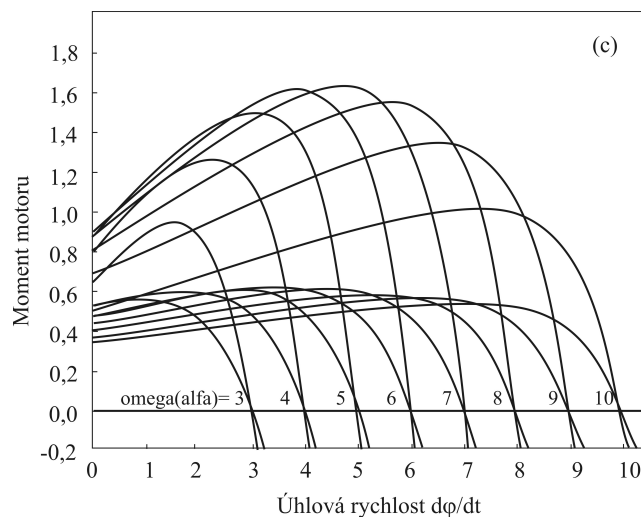
Fig. 26. Influence of stop damping.

Ještě přesnější model získáme využitím vztahů, které popisují elektrické a magnetické procesy probíhající uvnitř elektromotoru [25]. Pro konstantní hodnoty L indukčnosti, R odporu, $C\Phi$ magnetického toku je závislost mezi proudem i a vstupním napětím U dána vztahem

$$\frac{L di}{dt} + RI + \Phi \dot{\varphi} = U. \quad (22a)$$

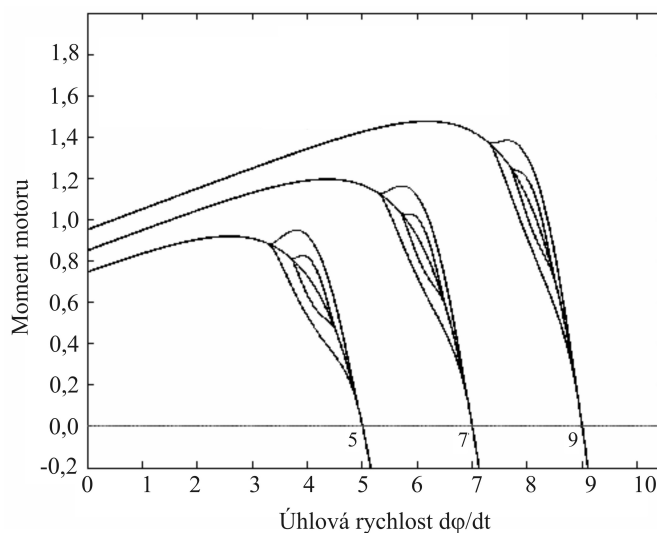
Tato rovnice musí být doplněna rovnicí pro otáčení rotoru φ :





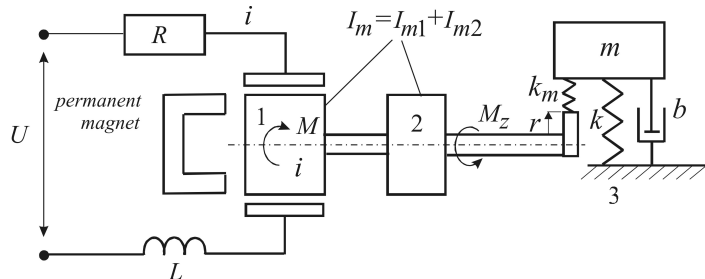
Obr. 27a,b,c. Příklady statických charakteristik motorů pro různé hodnoty napájecího parametru pro běh naprázdno.

Fig. 27a,b,c. Examples of static characteristics of motors for different values of the idle energy input parameter.



Obr. 28. Dynamická charakteristika motoru s nelineárním tlumením $(d^2\varphi/dt^2)^3$ pro různé hodnoty napájecího parametru pro běh naprázdno.

Fig. 28. Dynamic characteristics of motor with nonlinear damping $(d^2\varphi/dt^2)^3$ for different values of the idle energy input parameter.



Obr. 29. Schéma elektromechanického systému.

Fig. 29. Scheme of electro-mechanical system.

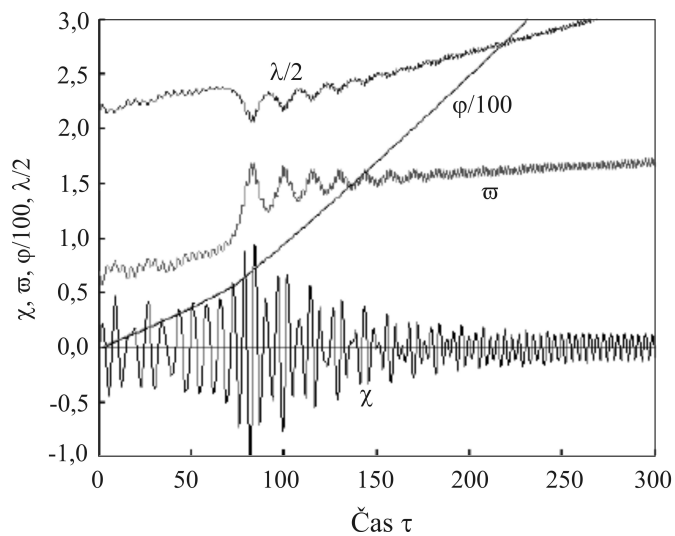
$$I_m \ddot{\varphi} = c\phi i - M_Z(\dot{\varphi}, t) - k_m r \sin \varphi (r \cos \varphi - y + y_0) \quad (22b)$$

a rovnicí kmitajícího systému

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky + f(y, \dot{y}) = k_m(r \cos \varphi - y + y_0). \quad (22c)$$

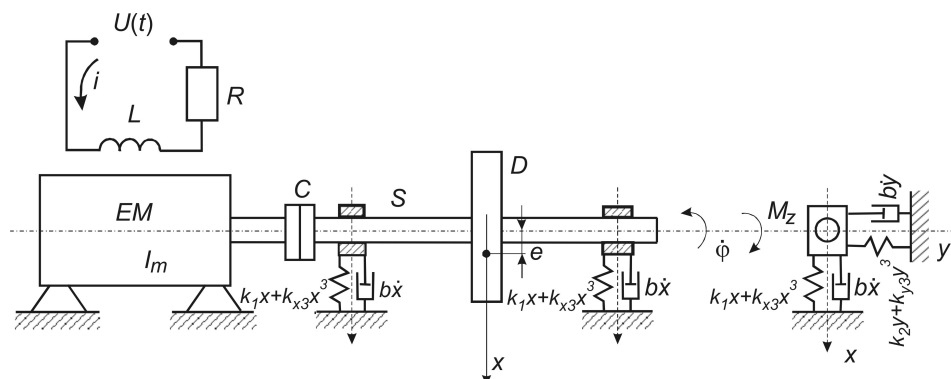
Schéma tohoto elektromechanického systému je na obr. 29.

Plynulým zvyšováním vstupního napětí $U(t)$ dojde k přechodu přes rezonanci, jehož průběh je znázorněn na obr. 30.



Obr. 30. Přechod přes rezonanci.

Fig. 30. Passage through resonance zone.



Obr. 31. Rotorový elektromechanický systém.

Fig. 31. Electro-mechanical system of rotor.

I když napětí U stoupá lineárně s časem, proud $i \approx \lambda$ a úhlová rychlost $\omega = \dot{\varphi}$ vykazují značné kolísání a vyšší harmonické složky.

Podobné jevy se vyskytují i u systému buzeného rotačním vibrátorem [26] a u rotorového systému, kde kmitající systém má dva stupně volnosti se stejnými vlastními frekvencemi [27] nebo dvě blízké frekvence [28, 29]. Schéma posledního případu je na obr. 31. Rovněž kmitání spojitých soustav – nosníků, desek, skořepin – může být silně ovlivněno vlastnostmi zdroje budící síly.

Okrajové podmínky u mechanických soustav výrazně mění jejich frekvenční spektrum a modální vlastnosti. Poněvadž budící sílu lze uvažovat jako jeden typ okrajových podmínek, je třeba vlastnostem zdrojů budících účinků věnovat stejnou pozornost, jaká se věnuje okrajovým podmínkám.

4. Závěr

- Je ukázáno, že vazba mechanického vibrátoru odstředivého nebo vačkového typu konečného výkonu s kmitajícím systémem je oboustranná.

- Tato vazba ovlivňuje stabilitu celého systému, průběh kmitání, ustálenou i přechodovou rezonanční křivku, otáčky vibrátoru atd.

- Mechanické jevy se kopírují i do průběhu elektrického proudu napájecího elektrický motor vibrátoru.

- Lineární systém s měkkým buzením má podobné vlastnosti jako nelineární systém s tvrdým buzením: nestabilita, přeskoky, hysterezní smyčka, rozdíl při stoupání a klesání otáček – Sommerfeldův efekt, rezonanční bariéra.

- Z matematického hlediska: nehomogenní rovnice $D(y, \dot{y}, \ddot{y}) = F(t)$ se změnil na homogenní bez pravé strany $D(y, \dot{y}, \ddot{y}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, U) = 0$.

- Z hlediska mechaniky: neexistuje vynucené kmitání, ale vždy samobuzené. Mechanický systém se mění na elektromagneticko-mechanický.

– Vzájemná vazba mezi kmitající soustavou a soustavou budící neexistuje jen u mechanických vibrátorů, ale i u elektrodynamických (zvyšují tlumení) a u elektromagnetických (posouvají vlastní frekvenci).

– Dynamickým vlastnostem zdrojů budících sil je třeba věnovat stejnou pozornost jako okrajovým podmínkám.

Poznámka: Článek vznikl rozšířením referátu [30].

Poděkování

Článek byl vypracován v rámci projektu GA ČR č. 101/06/0063 – Nové počítačové přístupy ke zkoumání nelineárního a chaotického kmitání rotorů v důsledku jejich interakce s okolím.

LITERATURA

- [1] KRATOCHVÍL, C.—KREJZA, J.: Modelling of drive systems. Brno, Institute of Mechanics of Solids, VUT Brno 2003.
- [2] PROCHÁZKA, F.—KRATOCHVÍL, C.: Úvod do matematického modelování pohonových soustav. Brno, AN CERM 2002.
- [3] SLAVÍK, J.—STEJSKAL, V.—ZEMAN, V.: Základy dynamiky strojů. Praha, Vyd. ČVUT 1997.
- [4] SOMMERFELD, A.: Physikalische Zeitschrift, 3, 1902, s. 266.
- [5] KONONĚNKO, V. O.: Trudy seminaru po teorii mekhanizmov i mašin, 71, 1958, s. 22.
- [6] KONONĚNKO, V. O.: In.: Sborník ÚVS, Zásady novodobé konstrukce strojů. Red.: Půst, L., Novák, J. Praha, NČSAV 1959, s. 272.
- [7] BLECHMAN, I. I.: Inženyrnyj Sbornik, t. XVI, 1953, s. 49.
- [8] PŮST, L.: Aplikace matematiky, 3, 1958, s. 428.
- [9] BREPTA, R.—PŮST, L.—TUREK, F.: Mechanické kmitání. Technický průvodce, 71, Praha, Sobotáles 1994.
- [10] GUZ, A. N.—MARKUŠ, Š.—PŮST, L.: Dinamika těl vzájemodějstvujících so sredoj. Kijev, Naukova Dumka 1991.
- [11] PŮST, L.: In: Sborník Dynamika strojů. Red.: Gonda, J., Plander, I. Bratislava, Vyd. SAV 1963, s. 185.
- [12] PŮST, L.: In: 9. World Congress on TMM. Red.: Rovetta, A. Politecnico of Milano, Vol. 2, 1995, s. 1489.
- [13] KONONĚNKO, V. O.: Nelinějnyje kolebanija mekhaničeskich sistem. Kijev, Naukova Dumka 1980.
- [14] ALIFOV, A. A.—FROLOV, K. V.: Vzájemodějstvie nelinejnyh kolebatelnyh sistem s istočnikami energii. Moskva, Nauka 1985.
- [15] PŮST, L.: In: Inženýrská mechanika '96. Red.: Kratochvíl, C. Svratka, VUT Brno 1996, s. 197.
- [16] BALTHAZAR, J. M. a i.: Meccanica, 38, 2003, s. 613.
- [17] BALTHAZAR, J. M. a i.: In: Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Application to Engineering. Red.: Balthazar, J. M., Mook, D. T., Rozario, J. M. Vol. 1, AAM, ABCM 1997, s. 88.

- [18] BRASIL, R. M.—BALTHAZAR, J. M.: In: Control of Oscillations and Chaos. Red.: Fradkov, A. L. St. Petersburg, IPME RAS 2000, s. 275.
- [19] BALATO, D. a i.: In: Control of Oscillations and Chaos. Red.: Fradkov, A. L. St. Petersburg, IPME RAS 2000, s. 286.
- [20] KRASNOPOLSKA, T. S.—ŠEVC, A. Y.: Pribladnaja mehanika, 26, 1990, s. 90.
- [21] ORAVSKÝ, V.—MUDRIK, J.: Stroj. Čas., 35, 1984, s. 153.
- [22] PŮST, L.: In: Proc. 20th Conference Computational Mechanics. Red.: Vimmer, J. Nečtiny, ZČU 2004, s. 421.
- [23] PŮST, L.: In: Proceedings Interaction and Feedbacks. Red.: Zolotarjev, I. Prague, Institute of Thermomechanics AS CR 2004, s. 125.
- [24] PŮST, L.: In: Proc. Inženýrská mehanika 2005. Red.: Fuis, Vl., Krejčí, P., Návrát, T. Svratka, 2005, s. 12, CD-ROM verzia.
- [25] KRATOCHVÍL, C.—PROCHÁZKA, F.: In: Proc. Computational Mechanics 2004. Red.: Vimmer, J. Nečtiny, ZČU Plzeň 2004, s. 231.
- [26] PŮST, L.: In: Proc. 21st Conference Computational Mechanics 2005. Red.: Vimmer, J. Nečtiny, ZČU Plzeň 2005, s. 493.
- [27] PŮST, L.: In: Interaction and Feedbacks 2005. Red.: Zolotarjev, I. Prague, Institute of Thermomechanics AS CR 2005, s. 113.
- [28] PŮST, L.: In: Proc. Computational Mechanics 2006. Red.: Vimmer, J. Nečtiny, ZČU Plzeň 2006, s. 497.
- [29] PŮST, L.: In: Proceedings 12th IFToMM World Congress. Red.: Merlet, J. P. Besancon (France), LMA-CNRS 2007, s. 1, CD-ROM, Ref. 540.
- [30] PŮST, L.: In: Engineering Mechanics 2007. Red.: Zolotarev, I. Svratka, UT AV ČR, CD-ROM, 2005, Ref. 1.

Rukopis dodaný: 14.12.2007

Rukopis upravený: 14.2.2008